

2. kapitola – Kvadratické nerovnice

Při řešení kvadratické nerovnice postupujeme nejprve, jako bychom řešili kvadratickou rovnici. Nalezneme-li kořeny, zobrazíme si kvadratický trojčlen do soustavy kolmých os x a y jako parabolu, která prochází osou x právě v bodech odpovídajících kořenům.

Kvadratickou rovnici si upravme tak, aby před kvadratickým členem bylo kladné číslo. Potom je parabola otevřená do kladného ypsilonového nekonečna.

V případě, že kvadratický trojčlen je menší než nula, zajímá nás údolí pod osou x a kořeny jsou všechny x -ové hodnoty této oblasti odpovídající.

Je-li kvadratický trojčlen větší než nula, zaměříme se na větve nad osou x a kořeny jsou všechny x -ové hodnoty těmito oblastem odpovídající.

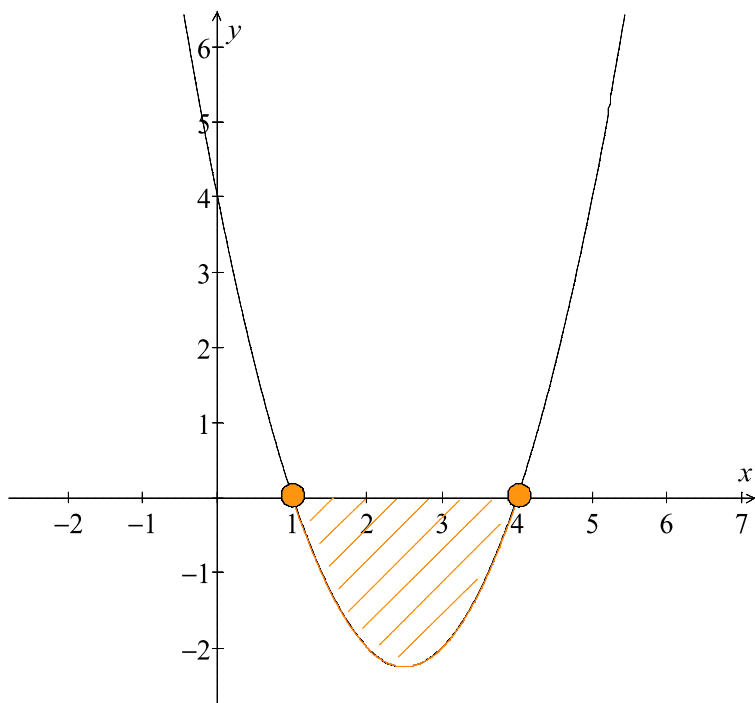
Rovnost kvadratického trojčlenu s nulou splňují průsečíky paraboly a osy x .

1. Vypočítej kvadratickou nerovnici $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

Pro případ rovnosti platí:

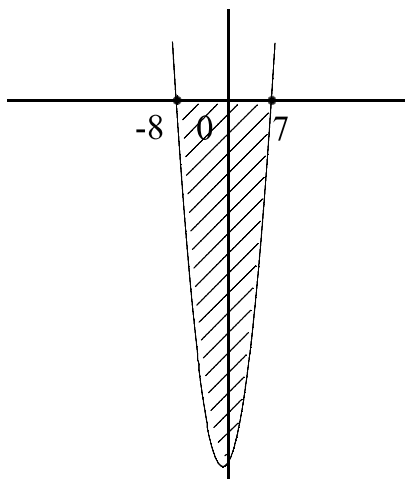
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$



$$x \in \langle 1, 4 \rangle$$

2. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $x^2 + x - 56 \leq 0$?

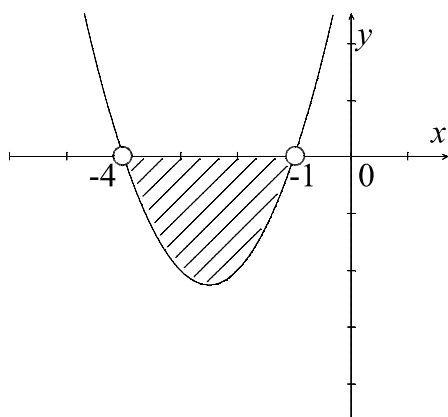
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2} = \begin{matrix} \nearrow -8 \\ \searrow 7 \end{matrix}$$



$$\underline{\underline{x \in \langle -8, 7 \rangle}}$$

3. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $x^2 + 5x + 4 < 0$?

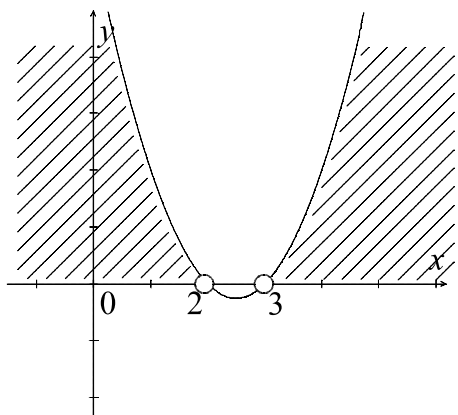
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$



$$\underline{\underline{x \in (-4, -1)}}$$

4. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $x^2 - 5x + 6 > 0$?

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$



$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)}}$$

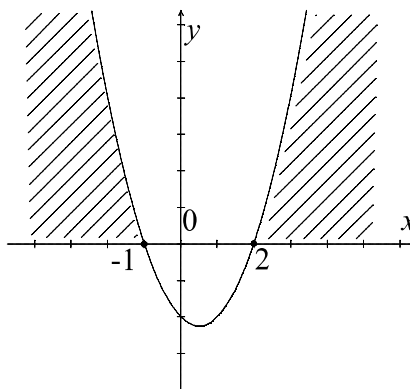
5. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $-x^2 + x + 2 < 0$?

$$-x^2 + x + 2 < 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}}$$



Pozor, při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se otáčí znaménko nerovnosti.

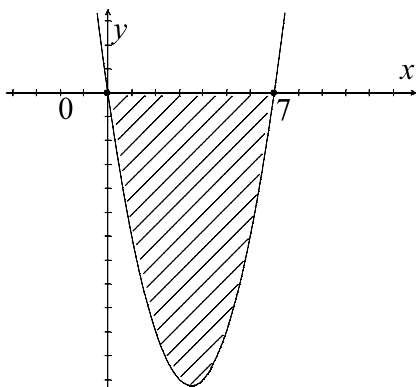
6. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $x^2 - 7x \leq 0$?

$$x^2 - 7x \leq 0$$

$$x(x - 7) \leq 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 7$$

$$\underline{\underline{x \in \langle 0, 7 \rangle}}$$



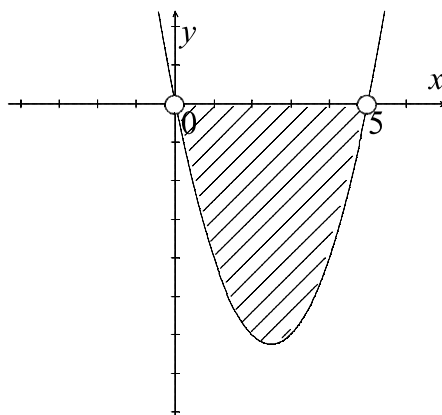
7. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $5x - x^2 > 0$?

$$5x - x^2 > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - 5x < 0$$

$$x(x - 5) < 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 5$$

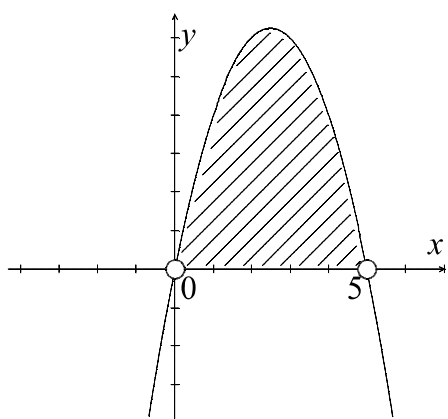
$$\underline{\underline{x \in (0, 5)}}$$



Jiná metoda:

$$x(5 - x) > 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 5$$



		0		5	
x	-		+		+
$5 - x$	+		+		-
	$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$

$$\underline{\underline{x \in (0, 5)}}$$

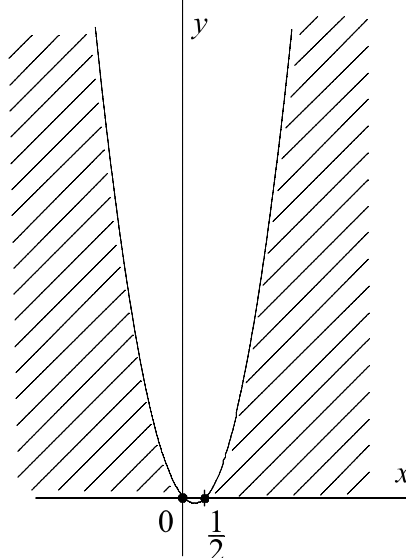
8. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $2x^2 - x > 0$?

$$2x^2 - x > 0$$

$$x(2x - 1) > 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}}$$



Teorie:

Vyjde-li diskriminant kladně, jsou dva kořeny a řešení vypadá, jak pozorujeme na ukázkových úlohách.

Vyjde-li diskriminant nula, znamená to, že parabola sedí svým „dnem“ na ose x .

Vyjde-li diskriminant záporně, vznáš se celá parabola nad osou x .

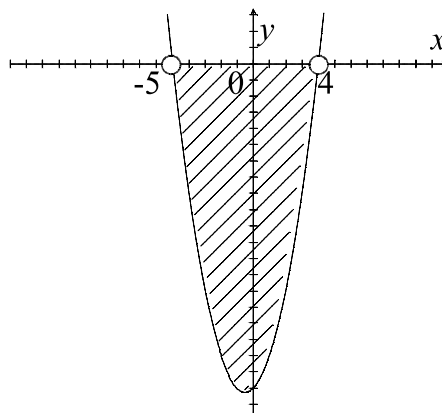
9. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $\frac{x^2 + x - 20}{5x^2 + 1} < 0$?

Jmenovatel je evidentně kladný $\Rightarrow$ čítec musí být záporný

$$x^2 + x - 20 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{matrix} \nearrow -5 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{x \in (-5, 4)}}$$



10. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2 + 5}{6x - 3} - 1$. Pro jaká x nabývá funkce nezáporných hodnot?

Podm.: $x \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{x^2 + 5}{6x - 3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 5 - 6x + 3}{6x - 3} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{6x - 3} \geq 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$	2	4	
$x^2 - 6x + 8$	+	+	−	+	
$6x - 3$	−	+	+	+	

$$\ominus$$

$$\oplus$$

$$\ominus$$

$$\oplus$$

$$\underline{\underline{x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \langle 4, +\infty \right)}}$$